

# अध्यापक शिक्षक की डायरी-IV

## संख्याओं का जोड़-तोड़

रविकांत

**ह**मारे यहां प्राथमिक कक्षा और उसमें भी सरकारी विद्यालयों के बच्चों से अध्यापकों की यह शिकायत लगातार बनी रहती है कि वे संख्याएं ठीक से नहीं जानते। बहुत से अध्यापक रोज गिनती रटवाते हैं, पढ़वाते हैं और उसकी नकल करवाते हैं। खुद भी ये तीनों काम करवाते हैं और किसी तेज तर्रार बच्चे को खड़ा करके उससे भी करवाते हैं। बहुत से सरकारी विद्यालयों में पहाड़ों के साथ-साथ गिनती की खुराक भी नियमित तौर पर रामबाण दवा की तरह दिन में एक या उससे ज्यादा बार दी जाती है। इसके बावजूद कुछ ही बच्चे गिरते-पड़ते तीसरी-चौथी तक इसे किसी न किसी तरह से सीख लेते हैं और कई तो इनके बाणों से घायल अधबीच में ही स्कूल छोड़ जाते हैं।

बच्चों में संख्या की समझ गहरी न हो पाने के कई कारण हो सकते हैं, जो विद्यालय के बाहर भी हो सकते हैं और विद्यालय के भीतर भी हो सकते हैं। अध्यापक होने के नाते हमारा ज्यादा जोर विद्यालय के भीतर ही चलता है सो मैंने संख्या की समझ को गहरा करने के लिए संख्या को तोड़ने व जोड़ने का काम हाथ में लिया। इस पर अध्यापकों के साथ काम करके भी देखा। उन्होंने इसे काम लेते वक्त संख्याओं को तोड़ने व जोड़ने का काम एक साथ करवाया। इस पर मैंने सुझाव दिया कि आरंभ में दोनों काम एक साथ न करें। पहले किसी कालांश में संख्याओं को तुड़वाएं और फिर किसी दूसरे कालांश में उसे जुड़वाने का काम करें और तीसरे किसी कालांश में संख्या को तोड़ने व जोड़ने, दोनों ही तरह के काम करवाएं। इससे बच्चों को संख्याएं समझने में आसानी रहेगी।

एक अध्यापक को यह बात हजम नहीं हुई तो उसने सवाल रखा कि संख्याएं जोड़ना, किसी संख्या को तोड़ने की तुलना में ज्यादा आसान है तो पहले आप संख्याएं जुड़वाइए। वैसे भी संख्या तुड़वाने का तुक ही क्या है। आप पहले दो संख्याएं मिला कर 5 बनवाइए, इसके बाद 5 को तुड़वा कर दो संख्याएं बनवाइए। इस पर मैंने कहा कि संख्याओं को तोड़ना, संख्याओं को जोड़ने की तुलना में आसान है। इस पर वही अध्यापक बोले कि संख्याओं को जोड़ना संख्याओं को तोड़ने की तुलना में ज्यादा आसान है। यह तो मेरी बात के जवाब में उनकी बात हो गई। हम दोनों ने अपने काम के आसान होने की कोई वजह नहीं बताई और जो बताई वो एक दूसरे के गले नहीं उतर पाई। हम दोनों थोड़ी देर तक अपनी-अपनी बात पर अड़े रहे। लेकिन एक दूसरे को अपनी बात का कारण समझा पाने में नाकाम ही रहे। मेरे मन में था कि इतनी आसान-सी बात इनके समझ में क्यों नहीं आ रही और अध्यापक के मन में शायद यह था कि जोड़ना तो हम सिखाते ही हैं, वह इतना आसान है तो फिर यह संख्याओं को तोड़ने की मुसीबत हमारे सर पर क्यों लादी जा रही है। आखिरकार थोड़ी देर तक एक-दूसरे से जूझने के बाद हमने अपनी बातचीत को बाद के लिए टाल दिया।

बाद में इस पूरी घटना पर पलट कर सोचते वक्त तो लगा कि दोनों कामों में से कौनसा काम सरल है यह जानने के लिए क्यों न दोनों कामों को पूरा करने के लिए उठाए जाने वाले कदमों की सूची बनाई जाए। दिल के किसी कोने में हलका-सा यकीन था कि संख्या तोड़ना मुझे आसान लगता है तो जरूर उस तरीके में कम कदमों का इस्तेमाल होगा। तो संख्या तोड़ने के कदमों की सूची बनाई जो इस तरह से बनी :-

पहला कदम : संख्या गिनना (तीली या किसी चीज की मदद से)

दूसरा कदम : संख्या को दो टुकड़ों में तोड़ना

तीसरा कदम : पहले टुकड़े में आई चीजें गिनना

चौथा कदम : दूसरे टुकड़े में आई चीजें गिनना

पांचवां कदम : ली गई संख्या तथा उसके टुकड़ों से बनने वाली दोनों संख्याएं तथा उनका आपसी संबंध बताना।

अब दूसरा तरीका लेकर उसमें उठाए गए कदमों की सूची बनाई, जो इस तरह से बनी :-

पहला कदम : पहली संख्या गिनना

दूसरा कदम : दूसरी संख्या गिनना

तीसरा कदम : दोनों संख्याओं को मिलाना और गिनना

चौथा कदम : पहली व दूसरी संख्या तथा दोनों को मिलाने से बनने वाली तीसरी संख्या, के बीच में संबंध बताना

मेरा यकीन चूर-चूर हो गया। दूसरे तरीके में उठाए गए कदमों की संख्या तो पहले तरीके के कदमों से भी कम दिख रही थी। मैं अगर तीसरे कदम के दो हिस्से कर देता जिसमें पहले मिलाना होता व बाद में गिनना, तो भी दूसरे तरीके में पांच ही कदम होते। यानी कदमों की संख्या के आधार पर तो दोनों तरीकों में कोई फर्क नजर नहीं आता। अब भी सवाल वहीं का वहीं खड़ा था कि कैसे पता लगाएं कि दोनों तरीकों में से कौनसा तरीका आसान है। ताकि यह तय किया जा सके कि किसे पहले किया जाना चाहिए।

तो मुझे क्योंकि लग रहा था कि संख्या तोड़ना, संख्याओं को जोड़ने की तुलना में आसान हैं। फिर सोचा कि क्यों न इन दोनों तरीकों की थोड़ी और बारीकी से छानबीन की जाए।

दोनों ही तरीकों में पहला बुनियादी फर्क यह नजर आया संख्या को तोड़ते वक्त तो आप एक ही संख्या को कई तरह से तोड़ सकते हैं जबकि संख्या मिलाने में आपको दो संख्याओं को मिला कर एक ही जवाब मिलता है। और, जैसे-जैसे संख्या बड़ी होती जाती है, वैसे-वैसे एक ही संख्या के अलग-अलग तरह से टुकड़े करने की संभावनाएं भी बढ़ती चली जाएंगी। जैसे, 5 के टुकड़े दो तरह से किए जा सकते हैं - 1, 4 तथा 2, 3 और इसे उलट भी सकते हैं, जैसे, 4, 1 तथा 3, 2 यानी आप कुल मिला कर संख्या के चार तरह से टुकड़े कर सकते हैं। इसी तरह 7 के टुकड़े आप 6 तरह से कर सकते हैं। इसका एक मतलब यह भी हुआ कि आप एक संख्या से कई सवाल बना कर हल करवा सकते हैं और इससे आपको यह समझने में भी मदद मिलती है कि ये संख्याएं अलग-अलग तो हैं लेकिन इनके बीच में संबंध भी है।

जबकि संख्या में मिलाने यानी जोड़ने वाले तरीके में अगर आप कोई दो संख्याएं लेते हैं तो उन्हें मिला कर कोई एक तीसरी संख्या बनेगी। यानी आप उन संख्याओं को एक या दो तरीके से मिला कर एक ही संख्या बना सकते हैं। यानी इसमें आपके पास एक ही सवाल व एक ही जवाब मिलता है। इस लिहाज से पहला काम ज्यादा गणितीय संभावनाओं से भरा है।

दूसरा फर्क यह नजर आया कि अगर आप संख्याएं मिलाने वाले काम में, ज्यादा तरीकों से किसी संख्या को बनाने की संभावनाएं बढ़ाने के लिए 1 से 5 तक की संख्याएं लेते हैं और किन्हीं दो संख्याओं को मिला कर पांच बनाने के

लिए कहते हैं तो इसमें या तो प्रयत्न व भूल का तरीका आजमाना पड़ेगा। या यह सोचना पड़ेगा कि एक में कितने मिलाएंगे कि वो 5 हो जाए। या एक में 1-1 करके कितने मिलाएं कि वो पांच हो जाए। ये दोनों ही थोड़े मुश्किल विचार हैं यानी यह तरीका संख्या तोड़ने वाले तरीके से कहीं ज्यादा मुश्किल है। और इसमें भी आप किन्हीं दो संख्याओं को मिला कर एक तरीके से ही दी गई संख्या बना सकते हैं।

तीसरे फर्क के बारे में सोचते हुए मुझे याद आया कि कुछ दिन पहले ही एक अध्यापिका ने यह समस्या रखी थी कि उसकी एक बच्ची 4 गिन लेती है, 5 भी गिन लेती है और दोनों को मिला कर 9 भी गिन लेती है लेकिन जब उसे पूछते हैं कि 4 और 5 मिला कर कितने हुए तो वह नहीं बता पाती है। यह बहुत महीन सी मुश्किल है जिसे समझने में मुझे भी थोड़ा वक्त लगा था। संख्याओं को मिलाने वाले दूसरे तरीके में बच्चों को पहली संख्या गिननी है, फिर दूसरी संख्या गिननी है और दोनों को मिला कर गिनना है और तीनों संख्याओं के आपसी संबंधों का पता लगाना है। इस लिहाज से पहला तरीका आसान है क्योंकि उसमें एक संख्या गिननी है, फिर उसके दो टुकड़े करने हैं और हरेक टुकड़े को गिनना है और ये ध्यान रखना है कि ये दोनों टुकड़े पहली संख्या के ही हिस्से हैं। इसमें उसे दोनों संख्याओं को मिला कर नहीं गिनना आता, जो कि छोटे बच्चों के लिए शुरुआत में मुश्किल होता है।

इन तीनों वजहों को लिखने के बाद भी मन में संतोष नहीं हुआ। लगा कि इससे दोनों तरीकों में फर्क बहुत आसानी से पकड़ में नहीं आ रहा। क्या इन दोनों तरीकों में ऐसा कोई फर्क है जिसे समझते ही दिमाग की बत्ती खट से जल जाए कि कौनसा तरीका ज्यादा आसान है। कई दिनों की जद्दोजहद में कई बार इस अधूरे लेख को उठाया और रख दिया। इसी जद्दोजहद में जब एक बार इसके बारे में सोच रहा था तो एक बड़ा ही आसान सा फर्क नजर आया जिसके बारे में सोच कर ही मुझे हैरत हुई कि यह फर्क इतने दिनों तक मुझे मिला या दिखा क्यों नहीं।

इन दोनों तरीकों में वह चौथा व सबसे अहम फर्क यह मिला कि अगर बच्चे संख्या को गिनना सीख रहे हैं तो उनके लिए किसी संख्या के टुकड़ों को गिनना इसलिए ज्यादा आसान है क्योंकि किसी संख्या के टुकड़े हमेशा उस मूल संख्या से तो छोटे होंगे या उनमें से एक टुकड़ा शून्य हो तो वह संख्या दूसरे टुकड़े के बराबर होगी। और जो बच्चा मूल संख्या को गिन सकता है उसके लिए उसके टुकड़ों को गिनने में मुश्किल आने की संभावना बहुत ही कम होगी क्योंकि उन्हें गिनना तो वह पहले ही अच्छे से सीख चुका होगा। लेकिन दो संख्याओं को मिलाने/जोड़ने से बनने वाली संख्या हमेशा उन दोनों संख्याओं से बड़ी होगी या उनमें से किसी एक संख्या के बराबर होगी, जब दूसरी संख्या शून्य हो। यह बहुत मुमकिन है कि कोई बच्चा 2 व 3 को तो ठीक से गिन लेता हो लेकिन उसे 5 को गिनना ठीक से न आता हो।

यानी अब मेरे पास कम से कम चार वजहें हो गईं जिनके आधार पर मैं संख्याओं के तोड़ने के काम को संख्याओं के जोड़ने के काम से आसान ठहरा सकता था।

जब हम इस समस्या पर बातचीत कर रहे थे तब समूह में एक सवाल यह भी उठा कि संख्या की जोड़ तो चलो जोड़ने में मदद कर देगा, लेकिन संख्या की तोड़ किस काम आएगी। इस पर यह बात की गई कि उदाहरण के लिए 5 के दो टुकड़े 1 व 4 किए गए तो यह सवाल पूछा जा सकता है कि 5 का 1 के साथ किस तरह का संबंध है और उसे इस भाषा में व्यक्त करने में मदद की जा सकती है कि 5 का 1 के साथ संबंध 4 ज्यादा का है। यानी 5, 1 से 4 ज्यादा है। अगर 5 के दो टुकड़े 4 व 1 किए तो यह समझा जा सकता है कि 5 का 4 से संबंध 1 ज्यादा का है। इस तरह से बात करने से दोनों तरह के टुकड़ों में फर्क भी साफ होगा और यह काम आगे चल कर घटाव से जोड़ा जा सकेगा। जैसे,  $5-1=4$  या  $5-4=1$ । जैसे हम मिलाना को जोड़ से पहले की अवधारणा कहते हैं वैसे ही संख्याएँ तोड़ने को घटाने से पहले की अवधारणा कह सकते हैं। यानी संख्या तुड़वाने का काम वहीं तक नहीं रूक जाता बल्कि उसे आगे जाकर घटाने की अवधारणात्मक समझ को विकसित करने से भी जोड़ा जा सकता है। तब हम यह पूछ सकते हैं कि 4, 5 से कितने कम है या 5, 4 से कितने ज्यादा है।

इस पूरी बातचीत व उस पर लिखी टीप के बाद लगा कि संख्याओं को तोड़ने की एक महत्वपूर्ण अवधारणा हमारे पाठ्यक्रम से नदारद-सी है जबकि वह मिलाने व जोड़ने की तुलना में ज्यादा आसान है। बाद में जब कई अध्यापकों व मैंने भी इस काम को बच्चों के साथ किया तो पाया कि तीलियों की मदद से हरेक बच्चे के लिए संख्या को टुकड़ों में तोड़ना बहुत ही आसान व रोचक काम हो सकता है, शर्त यही है कि तीलियां सिर्फ अध्यापक के कब्जे से निकल कर हरेक बच्चे के हाथ में पहुंच जाएं।

## समबाहु त्रिभुज बनाना - कोणों के जरिए भुजाएं बराबर करना

रटी हुई परिभाषा किस हद तक निरर्थक तो होती है इसके साथ ही आंखों के सामने मौजूद हकीकत के प्रति हमें अंधा भी बना देती है, एक बार फिर से इस बात का गहरा अहसास हुआ। इस बार मैं तीन-चार राज्यों के कक्षा 1 से 10 के अध्यापकों के साथ काम कर रहा था। सभी गणित के अध्यापक थे। वे सभी गणित के शिक्षाशास्त्र की समझ को गहरा व व्यापक करने के लिए बनाए गए एक पाठ्यक्रम में हिस्सा लेने के लिए आए हुए थे। उनके साथ किए जाने वाले काम में मेरे पास मुद्दा था - उच्च प्राथमिक स्तर की गणित की अवधारणाओं पर काम करने के शिक्षाशास्त्र को समझना। उस समूह के साथ काम करने के लिए मैंने ज्यामिति की अवधारणा चुनी। सोचा कि सभी गणित के अध्यापक हैं तो इनके लिए कागज मोड़ कर त्रिभुज बनाना क्या मुश्किल काम होगा। मूल योजना तो त्रिभुज के तीनों कोणों के योग का भौतिक सत्यापन करने व फिर उसे साबित करने की थी। उसकी पूर्व तैयारी के तौर पर त्रिभुज बनाने के काम को लिया गया था ताकि उन त्रिभुजों का इस्तेमाल त्रिभुज के कोणों के योग को 180 डिग्री के बराबर सत्यापित करने में किया जा सके। सभी के साथ यह बात की गई कि भुजा व कोण के आधार पर त्रिभुज के कितने प्रकार होते हैं। सभी को हरेक तरह का एक-एक त्रिभुज बनाना है और किसी एक त्रिभुज के तीन नमूने बनाने हैं। किसी एक त्रिभुज के तीन नमूने बनाने के लिए इसलिए कहा गया ताकि वे आगे जाकर उनकी मदद से त्रिभुज के कोणों के योग को सत्यापित कर पाएं।

सभी लोग सभी तरह के त्रिभुज बनाने में जुट गए। बाकी सभी त्रिभुज तो आसानी से बन गए लेकिन समबाहु त्रिभुज बनाने में कइयों को मुश्किल आ गई। अध्यापक अलग-अलग तरह के त्रिभुज बना कर मुझ दिखाने लगे। कइयों ने समद्विबाहु त्रिभुज को समबाहु कह कर दिखा दिया। उन्होंने इस बात की जांच करने की जहमत तक न उठाई कि उनका त्रिभुज समबाहु है या नहीं। दो एक को तो यह भी समझ पाने में मुश्किल हुई कि इस बात की जांच कैसे करें। सभी को समबाहु त्रिभुज की परिभाषा अच्छे से पता थी, सभी उसे काफी अरसे से बच्चों को भी पढ़ा रहे थे, लेकिन फिर भी हरेक को समबाहु त्रिभुज बनाने में मुश्किल आ रही थी। बड़ी मुश्किल से उनमें से कुछ ही व्यक्ति अपने-आप समबाहु त्रिभुज बना पाए। एक बार सोचा कि इनसे पूछा जाए कि क्या आप अब किसी दूसरे को समबाहु त्रिभुज बनाना सिखा सकते हैं लेकिन फिर यह सोच कर इस सवाल को टाल दिया कि सभी को खुद ही बनाने में इतनी मुश्किल हो रही है तो दूसरों को बताना उनके लिए आसान न होगा। हमने इस पर बातचीत को आगे नहीं बढ़ाया क्योंकि हमें त्रिभुज के कोणों के योग पर काम करना था लेकिन आखिर में सभी को यह बात जरूर बता दी कि वे इसके कोणों पर ध्यान देकर इसे आसानी से बना सकते थे।

बाद में पलट कर जब सोचा कि सभी को कागज मोड़ कर समबाहु त्रिभुज बनाने में इतनी मुश्किल क्यों आ रही है, तो यह सूझा कि सभी का ध्यान इस बात पर था कि कैसे त्रिभुज की भुजाएं बराबर की जाएं। सभी येन-केन प्रकारेण अपने त्रिभुज की भुजाएं बराबर करने पर तुले हुए थे। कोई-कोई तो इस फेर में एक ही कागज को आठ-दस बार मोड़ चुके थे। किसी ने इस बात पर ध्यान नहीं दिया कि कागज मोड़ कर त्रिभुज बनाने में प्रमुख काम कागज को मोड़ना है और जिस कोने या किनारी पर कागज को मोड़ा जाता है उस बिंदु पर कोई न कोई कोण बनता है। मोड़ते वक्त उस कोने के आकार को छोटा या बड़ा किया जाता है। इससे उसकी भुजाएं अपने-आप छोटी-बड़ी हो जाती है। इसी तरह किसी ने इस बात पर भी साफ तौर पर विचार नहीं किया कि समबाहु त्रिभुज के तीनों कोण बराबर

होते हैं तो उनमें से हरेक का मान 60 डिग्री होगा। इसके साथ ही 60 डिग्री का कोण समकोण का दो तिहाई या 30 डिग्री का दुगुना होता है। समकोण वाला त्रिभुज सभी बना चुके थे। उस समकोण का दो तिहाई कोण बनाने का विचार भी किसी के मन में साफ तौर पर नहीं उभरा। किसी ने भी समबाहु त्रिभुज संबंधी इस समझ को खुद के लिए साफ तौर पर न तो इस भाषा में व्यक्त किया, न ही त्रिभुज बनाने में इसका इस्तेमाल किया।

हम देख सकते हैं कि परिभाषा क्योंकि भुजाओं की बराबरी पर केन्द्रित थी इसलिए किसी का भी ध्यान इस बात पर नहीं गया कि समबाहु त्रिभुज के तीनों कोण भी बराबर होते हैं और कागज मोड़ कर त्रिभुज बनाने के मामले में इस बात पर ध्यान केन्द्रित किया जाना चाहिए था। एक वजह यह भी थी कि इनमें से किसी ने भी शायद ही कभी कागज मोड़ कर त्रिभुज बनाए थे। साफ था कि परिभाषा को याद रख लेने से, उसे इस्तेमाल कर लेने की काबिलियत अपने-आप नहीं आ जाती। हमें उस परिभाषा के उपयुक्त पहलुओं को काम में ली जाने वाली सामग्री के स्वभाव के साथ जोड़ कर समझना पड़ता है कि उसका कौनसा पहलू किस सामग्री के संदर्भ में उपयोगी होता है। अगर हम तीलियों से त्रिभुज बना रहे होते तो हमें समबाहु त्रिभुज के लिए समान लंबाई की तीन तीलियां लेनी पड़तीं, उसमें कोण पर ध्यान देने की ज्यादा जरूरत नहीं पड़ती। अगर अलग लंबाई की तीली लेते तो कितना ही कोण को घटा बढ़ा लेते, फिर भी समबाहु त्रिभुज नहीं बनता। बहुत साफ है कि किसी अवधारणा को अमल में लाने के लिए सिर्फ परिभाषा को याद रखना ही काफी नहीं होता बल्कि आपको उसके बारे में सोच कर, उस अवधारणा के उन पहलुओं को चुनना होता है जो दी गई सामग्री के लिए उपयुक्त होते हैं। फिर उन पहलुओं को उस सामग्री पर काम लेने के नतीजों को देखना होता है कि क्या हम जैसा सोच रहे थे वही असर उस पर पड़ रहा है या नहीं। आखिर में यह भी सभी को याद दिलाया कि परिभाषा से उसके इस्तेमाल पर पहुंचना ज्यादा मुश्किल काम है। इसलिए ज्यादा बेहतर रहता है कि उदाहरणों के जरिए परिभाषा तक पहुंचा जाए। पहले खुद के शब्दों में परिभाषा को गढ़ा जाए और उसके बाद परिभाषा की मानक शब्दावली को समझा जाए। यह दरअसल ज्यामिति सिखाने के तरीके को सर के बल खड़ा करने की कवायद है क्योंकि अरसे से हम ज्यामिति को परिभाषाओं को रटकर ही सीखते व सिखाते आए हैं। ♦

**लेखक परिचय:** करीब 23 वर्षों से प्रारंभिक शिक्षा में शिक्षक शिक्षा, शिक्षण सामग्री एवं पाठ्यपुस्तक निर्माण, शिक्षाक्रम और अनुवाद के क्षेत्र में कार्य। हाल-फिलहाल विभिन्न संस्थाओं के साथ बतौर शैक्षिक सलाहकार कार्यरत हैं।

**संपर्क :** 9414057424; ravikaant@gmail.com